

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 16.02.2013

Clasa a X-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1

Se observă că $a_1, a_2, a_3 > 0$ și $a_{f(1)} \cdot a_{f(2)} \cdot a_{f(3)} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1$ pentru oricare bijecție $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$...2pAvem $(a_{f(1)} + 2a_{f(2)} + 3a_{f(3)}) \cdot (3a_{f(1)} + 2a_{f(2)} + a_{f(3)}) =$

$$(a_{f(1)} + a_{f(2)} + a_{f(3)} + a_{f(3)} + a_{f(3)}) \cdot (a_{f(1)} + a_{f(1)} + a_{f(1)} + a_{f(2)} + a_{f(2)} + a_{f(3)}) \geq \dots 2p$$

$$\geq 6\sqrt[6]{a_{f(1)} \cdot a_{f(2)}^2 \cdot a_{f(3)}^3} \cdot 6\sqrt[6]{a_{f(1)}^3 \cdot a_{f(2)}^2 \cdot a_{f(3)}} = 36\sqrt[6]{(a_1 a_2 a_3)^4} = 36. \text{ Finalizarea } \dots 3p$$

Subiectul 2

a) Inegalitatea mediilor: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}, \forall a, b \in (0, \infty)$ 1pCum $a \in (0, 1) \Rightarrow \log_a \frac{2ab}{a+b} \geq \frac{1}{2}(1 + \log_a b) \Rightarrow 1 + \log_a \frac{2b}{a+b} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b \Rightarrow \dots 1p$ $\log_a \frac{2b}{a+b} \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b \Rightarrow \log_a \frac{2b}{a+b} \geq \frac{1}{2}(\log_a b - 1), \forall a \in (0, 1), b \in (0, \infty).$ 1pb) Dacă $x \in (0, 1)$, folosind inegalitatea de la punctul a), obținem relațiile:

$$\log_2 \frac{2x+1}{4x} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{4x}{2x+1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \left(\log_{\frac{1}{2}} x - 1 \right) \quad (1). \dots 1p$$

$$-\log_x \frac{2x+1}{2} = \log_x \frac{2}{2x+1} = \log_x \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \left(\log_x \frac{1}{2} - 1 \right) \quad (2). \dots 1p$$

Sumând (1) și (2): $0 \geq \frac{1}{2} \left(\log_{\frac{1}{2}} x + \log_x \frac{1}{2} - 2 \right) \geq \frac{1}{2}(2-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ realizează egalitatea în fiecare inegalitate din lanțul de inegalități folosit anterior. 1pDacă $x \in (1, \infty)$, atunci: $x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x+1 < 4x \Rightarrow \frac{2x+1}{4x} < 1 \Rightarrow \log_2 \frac{2x+1}{4x} < 0$ (3).De asemenea, avem: $x > 1 \Rightarrow 2x+1 > 3 \Rightarrow \frac{2x+1}{2} > \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \log_x \frac{2x+1}{2} > 0$ (4).Din (3) și (4) rezultă că nu există soluții $x \in (1, \infty)$ și deci $x = \frac{1}{2}$ este singura soluție a ecuației date. 1p

Subiectul 3

 $z_n = z_1 \cdot q^{n-1}, (\forall) n \geq 1$ 1pFie z_m și z_p astfel încât $\frac{z_m}{z_p} \in \mathbf{R}$. De aici deducem că $q^{m-p} \in \mathbf{R}$ 1pFie z_s și z_t astfel încât $|z_s| = |z_t|$. De aici avem $|z_1 q^{s-1}| = |z_1 q^{t-1}| \Rightarrow |q|^{s-t} = 1 \Rightarrow |q| = 1$ 1pDeci $|q^{m-p}| = 1$ și cum $q^{m-p} \in \mathbf{R}$ avem că $q^{m-p} = \pm 1$ 1pAșadar există $k \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $q^k = 1$ (de exemplu $k = 2 \cdot |m-p|$). 2p $z_{n+k} = z_1 q^{n+k-1} = z_1 q^{n-1} q^k = z_1 q^{n-1} = z_n, \forall n \geq 1$ deci mulțimea $\{z_n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$ este finită. 1p

Subiectul 4

Din relația din enunț și ținând cont de faptul că a, b, c sunt distincte, rezultă că $a+b, b+c, c+a$ sunt distincte și nenule. 2pAtunci $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^3 = \left(\frac{a+b}{c+a}\right)^3 = 1$, de unde $a+b = \varepsilon(b+c) = \varepsilon^2(c+a)$, unde $\varepsilon \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ și $\varepsilon^3 = 1$ 2pAdunând membru cu membru relațiile $a+b = \varepsilon(b+c), b+c = \varepsilon(c+a), c+a = \varepsilon(a+b)$, se obține că $a+b+c = 0$ 2pDe aici $c = -a-b, a = -b-c, b = -c-a$, de unde prin ridicare la cub rezultă concluzia. 1p